Apellido y nombres (padrón): ....

18/05/2023. Parcial de Análisis Matemático III. Curso 5

Para aprobar, se requiere resolver **3** *ejercicios* correctamente justificados.

1. Dada la función $f(z) = \dfrac{z}{z+1} + (z+1)e^{2/z^2}$. **a)** Hallar la parte principal de su serie de Laurent válida en un entorno de $z = 0$, indicando la región de convergencia. A partir de ésta, **b)** determinar el tipo de singularidad en $z = 0$ **c)** hallar el valor del residuo de $f(z)$ en $z = 0$.

2. **a)** Determinar para qué valores de $\omega \in \mathbb{R}$ la función $k(x, y) = e^x(y\,cos(y) + (x - \omega)sen(y))$ puede ser parte la parte real de una función analítica $f(z)$ y hallarla. Elija un valor de ω posible y calcule $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z+i}dz$ **b)** Hallar los ceros de la función $m(z) = e^{2z} + ei$. **c)** Hallar la relación que existe entre $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+} \overline{z}dz$ y el área encerrada por la curva $\mathcal{C}$, cerrada y simple[1].

3. Dada $g(z) = \dfrac{z+1}{z(z+2)}$, hallar un desarrollo en serie de Laurent de la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z+2)^n$ de forma tal que la serie $S = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$ sea convergente. En ese caso, ¿la serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ es convergente? Indicar el dominio de convergencia de la serie y hallar el valor de S.

4. Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{z(ie + e^{2z})} + \dfrac{\overline{z}}{2i}$, calcular el valor de $A(3) - A(2)$, sabiendo que: $A(\rho) = \displaystyle\oint_{|z|=\rho} f(z)dz$. ¿En qué cambiaría (si cambiara) el cálculo si se pidiera $A(3) - A(1)$? ¿Y $A(4) - A(2)$?

5. Decidir cuáles son los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes integrales convergen: **a)** $I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^{\alpha}(1+x^3)}$ **b)** $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^{\beta}}$. Justifique adecuadamente su respuesta.

---

[1]**Sugerencia**: Recuerde el Teorema de Green